TRANSPORT OPTIMAL INCOMPRESSIBLE

Yann BRENIER
CNRS-Université de Nice-Sophia

GRENOBLE-10 Mai 2012

POUR INTRODUIRE LE PROBLEME DE TRANSPORT OPTIMAL INCOMPRESSIBLE, ON SUIVRA LES ETAPES SUIVANTES:

1) L'INTERPRETATION GEOMETRIQUE D'ARNOLD DE LA THEORIE D'EULER DES ECOULEMENTS DE FLUIDES INCOMPRESSIBLES,

POUR INTRODUIRE LE PROBLEME DE TRANSPORT OPTIMAL INCOMPRESSIBLE, ON SUIVRA LES ETAPES SUIVANTES:

1) L'INTERPRETATION GEOMETRIQUE D'ARNOLD DE LA THEORIE D'EULER DES ECOULEMENTS DE FLUIDES INCOMPRESSIBLES,

2) LE PASSAGE AU DISCRET ET LA RECHERCHE D'ALGORITHMES COMBINATOIRES,

POUR INTRODUIRE LE PROBLEME DE TRANSPORT OPTIMAL INCOMPRESSIBLE, ON SUIVRA LES ETAPES SUIVANTES:

1) L'INTERPRETATION GEOMETRIQUE D'ARNOLD DE LA THEORIE D'EULER DES ECOULEMENTS DE FLUIDES INCOMPRESSIBLES,

2) LE PASSAGE AU DISCRET ET LA RECHERCHE D'ALGORITHMES COMBINATOIRES,

3) UN RETOUR AU CONTINU OUVRANT DE NOUVELLES PERSPECTIVES MATHEMATIQUES, DONT LA THEORIE DU TRANSPORT OPTIMAL "TOUT COURT" (bien documentée par les deux livres de C.Villani).

LES LOIS DU MOUVEMENT DES FLUIDES INCOMPRESSIBLES (COMME L'OCEAN) ONT ETE ETABLIES PAR L. EULER EN 1755-1757.

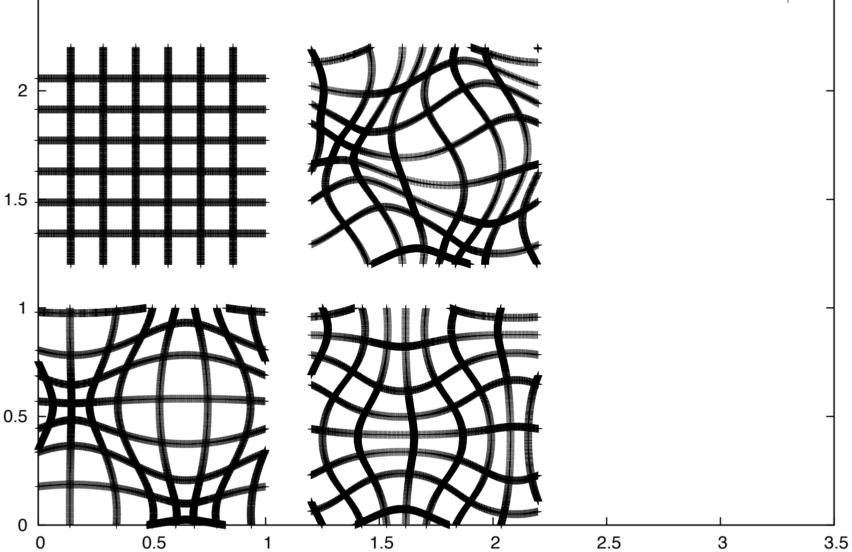
LES LOIS DU MOUVEMENT DES FLUIDES INCOMPRESSIBLES (COMME L'OCEAN) ONT ETE ETABLIES PAR L. EULER EN 1755-1757. **ELLES DERIVENT DU "PRINCIPE DE MOINDRE ACTION", DEJA EVOQUE PAR EULER, COMME L'A ETABLI V.I. ARNOLD (1937-2010) EN 1966 DANS SON ARTICLE AUX ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER.**

LES LOIS DU MOUVEMENT DES FLUIDES INCOMPRESSIBLES (COMME L'OCEAN) ONT ETE ETABLIES PAR L. EULER EN 1755-1757. ELLES DERIVENT DU "PRINCIPE DE MOINDRE ACTION", DEJA EVOQUE PAR EULER, COMME L'A ETABLI V.I. ARNOLD (1937-2010) EN 1966 DANS SON ARTICLE AUX ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER.

SELON ARNOLD, GEOMETRIQUEMENT, UN TEL "FLUIDE" SUIT UNE GEODESIQUE LE LONG DE L'ESPACE DES TRANSFORMATIONS INCOMPRESSIBLES.

LES LOIS DU MOUVEMENT DES FLUIDES INCOMPRESSIBLES (COMME L'OCEAN) ONT ETE ETABLIES PAR L. EULER EN 1755-1757. ELLES DERIVENT DU "PRINCIPE DE MOINDRE ACTION", DEJA EVOQUE PAR EULER, COMME L'A ETABLI V.I. ARNOLD (1937-2010) EN 1966 DANS SON ARTICLE AUX ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER.

SELON ARNOLD, GEOMETRIQUEMENT, UN TEL "FLUIDE" SUIT UNE GEODESIQUE LE LONG DE L'ESPACE DES TRANSFORMATIONS INCOMPRESSIBLES. (La métrique étant celle induite par la métrique L2 sur l'ensemble des transformations pas forcément incompressibles.)



EN BAS A DROITE UNE TRANSFORMATION INCOMPRESSIBLE qui obeïroit à ſon action. Cette idée de l'effort eſt de la derniere importance dans toute la Théorie, tant de l'équilibre que du mouvement, ayant fait voir, que la ſomme de tous les efforts eſt toujours un *maximum* ou *minimum*. Cette belle propriété convient admirablement avec le beau principe de la moindre action; dont nous devons la découverte à notre Illuſtre Préſident, M. de *Maupertuis*.

XXIII. Comme les équations que nous venons de trouver, renferment quatre variables x, y, z, & t, qui ſont abſolument indépendantes entr'elles, vû que la variabilité des trois premières s'étend ſur tous

LE PRINCIPE DE MOINDRE ACTION EVOQUE PAR EULER

Si le fluide n'étoit pas compreſſible, la denſité q ſeroit la même en Z, & en Z', & pour ce cas on auroit cette équation :

$$\left(\frac{du}{dx}\right)+\left(\frac{dv}{dy}\right)+\left(\frac{dw}{dz}\right)=0.$$

qui eſt auſſi celle ſur laquelle j'ai établi mon Mémoire latin allégué ci-deſſus.

XVIII. Cette formule ayant été fournie par la conſidération de la continuité du fluide, renferme déjà un certain rapport qui doit régner entre les quantités u, v, w, & q. Les autres déterminations doivent être tirées de la conſidération des forces, auxquelles chaque particule du fluide eſt aſſujettie : or, outre les forces accélératrices P, Q, R, qui agiſſent ſur le fluide en Z, il eſt auſſi ſollicité par la preſſion qui agit de toutes parts ſur l'élément du fluide contenu en Z. De la combinaiſon de ces doubles forces on tirera trois forces accélératrices ſelon la direction des trois axes; & puiſqu'on peut aſſigner les accélérations mêmes par la conſidération des viteſſes u, v, & w, nous tirerons de là trois équations, qui jointes à celle que nous venons de trouver, renfermeront tout ce qui regarde le mouvement des fluides, de ſorte que nous aurons alors des principes généraux & complets de toute la ſcience du mouvement des fluides.

XIX.

XXI. Nous n'avons donc qu'à égaler ces forces accélératrices avec les accélerations actuelles que nous venons de trouver, & nous obtiendrons les trois équations suivantes :

$$P - \frac{1}{q}\left(\frac{dp}{dx}\right) = \left(\frac{du}{dt}\right) + u\left(\frac{du}{dx}\right) + v\left(\frac{du}{dy}\right) + w\left(\frac{du}{dz}\right)$$

$$Q - \frac{1}{q}\left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{dv}{dt}\right) + u\left(\frac{dv}{dx}\right) + v\left(\frac{dv}{dy}\right) + w\left(\frac{dv}{dz}\right)$$

$$R - \frac{1}{q}\left(\frac{dp}{dz}\right) = \left(\frac{dw}{dt}\right) + u\left(\frac{dw}{dx}\right) + v\left(\frac{dw}{dy}\right) + w\left(\frac{dw}{dz}\right)$$

Si nous ajoutons à ces trois équations premièrement celle, que nous a fournie la considération de la continuité du fluide :

$$\left(\frac{dq}{dt}\right)$$

mouvement des fluides, & que ce que je viens d'expliquer, n'en contient qu'un foible commencement. Cependant tout ce que la Théorie des fluides renferme, eſt contenu dans les deux équations rapportées cy-deſſus (§. XXXIV.), de ſorte que ce ne ſont pas les principes de Méchanique qui nous manquent dans la pourſuite de ces recherches, mais uniquement l'Analyſe, qui n'eſt pas encore aſſés cultivée, pour ce deſſein : & partant on voit clairement, quelles découvertes nous reſtent encore à faire dans cette Science, avant que nous puiſſions arriver à une Théorie plus parfaite du mouvement des fluides.

CON-

VLADIMIR ARNOLD

Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits

Annales de l'institut Fourier, tome 16, n° 1 (1966), p. 319-361.

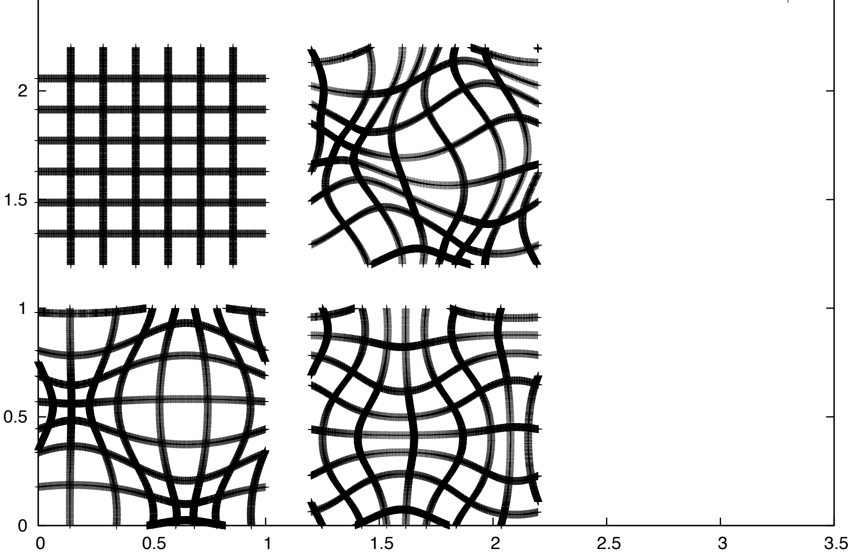
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1966__16_1_319_0>

Ainsi, un fluide incompressible, régi par les équations d'Euler, se déplace de façon à minimiser l'intégrale du carré de sa vitesse entre les configurations par lesquelles il passe au cours de son mouvement.

Ainsi, un fluide incompressible, régi par les équations d'Euler, se déplace de façon à minimiser l'intégrale du carré de sa vitesse entre les configurations par lesquelles il passe au cours de son mouvement. ON PEUT DONC SE POSER LE PROBLEME DE "TRANSPORT INCOMPRESSIBLE OPTIMAL":

Ainsi, un fluide incompressible, régi par les équations d'Euler, se déplace de façon à minimiser l'intégrale du carré de sa vitesse entre les configurations par lesquelles il passe au cours de son mouvement. ON PEUT DONC SE POSER LE PROBLEME DE "TRANSPORT INCOMPRESSIBLE OPTIMAL": ETANT DONNEES DEUX TRANSFORMATIONS INCOMPRESSIBLES, COMMENT NAVIGUER DE L'UNE A L'AUTRE AU MOINDRE COUT.

Ainsi, un fluide incompressible, régi par les équations d'Euler, se déplace de façon à minimiser l'intégrale du carré de sa vitesse entre les configurations par lesquelles il passe au cours de son mouvement. ON PEUT DONC SE POSER LE PROBLEME DE "TRANSPORT INCOMPRESSIBLE OPTIMAL": ETANT DONNEES DEUX TRANSFORMATIONS INCOMPRESSIBLES, COMMENT NAVIGUER DE L'UNE A L'AUTRE AU MOINDRE COUT. (C'est une façon inhabituelle -et a priori plus facile- de "résoudre" les équations d'Euler, non comme un problème d'évolution mais comme un problème d'optimisation.)



EN BAS A DROITE UNE TRANSFORMATION INCOMPRESSIBLE

EN VUE D'UN ALGORITHME DE CALCUL, ON CONSIDERE L'ANALOGUE DISCRET D'UN MOUVEMENT INCOMPRESSIBLE A L'INTERIEUR D'UN CUBE DE COTE UN (POUR FIXER LES IDEES),

EN VUE D'UN ALGORITHME DE CALCUL, ON CONSIDERE L'ANALOGUE DISCRET D'UN MOUVEMENT INCOMPRESSIBLE A L'INTERIEUR D'UN CUBE DE COTE UN (POUR FIXER LES IDEES), A SAVOIR LA PERMUTATION DE N PETITS CUBES DE MEME TAILLE.

EN VUE D'UN ALGORITHME DE CALCUL, ON CONSIDERE L'ANALOGUE DISCRET D'UN MOUVEMENT INCOMPRESSIBLE A L'INTERIEUR D'UN CUBE DE COTE UN (POUR FIXER LES IDEES), A SAVOIR LA PERMUTATION DE N PETITS CUBES DE MEME TAILLE. L' IDEE EST BIEN ILLUSTREE PAR LE JEU DE TAQUIN (VOIR PAGE SUIVANTE).

EN VUE D'UN ALGORITHME DE CALCUL, ON CONSIDERE L'ANALOGUE DISCRET D'UN MOUVEMENT INCOMPRESSIBLE A L'INTERIEUR D'UN CUBE DE COTE UN (POUR FIXER LES IDEES), A SAVOIR LA PERMUTATION DE N PETITS CUBES DE MEME TAILLE. L' IDEE EST BIEN ILLUSTREE PAR LE JEU DE TAQUIN (VOIR PAGE SUIVANTE). CETTE "DISCRETISATION" EST BIEN CONNUE EN THEORIE DES SYSTEMES DYNAMIQUES (THEORIE ERGODIQUE) MAIS LARGEMENT IGNOREE EN MECANIQUE DES FLUIDES.


LE
TAQUIN
8
14
12
16
12
8
4
15
11
7
3
14
10
6.
2
13
9.
5
1

ON ABOUTIT NATURELLEMENT AU PROBLEME DE TRANSPORT OPTIMAL INCOMPRESSIBLE DISCRET CONSISTANT A TROUVER UNE SUITE DE PERMUTATIONS $\sigma^{(1)}, \dots, \sigma^{(L-1)}$ MINIMISANT

ON ABOUTIT NATURELLEMENT AU PROBLEME DE TRANSPORT OPTIMAL INCOMPRESSIBLE DISCRET CONSISTANT A TROUVER UNE SUITE DE PERMUTATIONS $\sigma^{(1)}, \cdots, \sigma^{(L-1)}$ MINIMISANT

$$\sum_{k=1,L} \sum_{i=1,N} |A_{\sigma_i^{(k)}} - A_{\sigma_i^{(k-1)}}|^2$$

où on note $A_1, \cdots, A_N$ les centres de masse des N sous-cubes et on se donne les permutations "initiales et finales" $\sigma^{(0)}, \sigma^{(L)}$.

ON ABOUTIT NATURELLEMENT AU PROBLEME DE TRANSPORT OPTIMAL INCOMPRESSIBLE DISCRET CONSISTANT A TROUVER UNE SUITE DE PERMUTATIONS $\sigma^{(1)}, \cdots, \sigma^{(L-1)}$ MINIMISANT

$$\sum_{k=1,L} \sum_{i=1,N} |A_{\sigma_i^{(k)}} - A_{\sigma_i^{(k-1)}}|^2$$

où on note $A_1, \cdots, A_N$ les centres de masse des N sous-cubes et on se donne les permutations "initiales et finales" $\sigma^{(0)}, \sigma^{(L)}$. MODULO LA DISCRETISATION, ON CONSERVE LA RICHESSE DU MODELE D'EULER DANS CE PROBLEME D'OPTIMISATION COMBINATOIRE.

UNE CONDITION NECESSAIRE D'OPTIMALITE EST QUE CHAQUE PERMUTATION $\sigma^{(\mathbf{k})}$ SOIT SOLUTION DU PROBLEME D'OPTIMISATION COMBINATOIRE DIT "D'AFFECTATION"

UNE CONDITION NECESSAIRE D'OPTIMALITE EST QUE CHAQUE PERMUTATION $\sigma^{(\mathbf{k})}$ SOIT SOLUTION DU PROBLEME D'OPTIMISATION COMBINATOIRE DIT "D'AFFECTATION"

$$\inf_{\sigma} \sum_{i=1,N} c_{i\,\sigma_i}$$

où, ici, la "matrice de coût" $(\mathbf{c_{ij}})$ est donnée par
$\mathbf{c_{ij}} = |\mathbf{A_j} - \mathbf{B_i}|^2, \quad \mathbf{B_i} = (\mathbf{A}_{\sigma_\mathbf{i}^{(\mathbf{k}+1)}} + \mathbf{A}_{\sigma_\mathbf{i}^{(\mathbf{k}-1)}})/2.$

UNE CONDITION NECESSAIRE D'OPTIMALITE EST QUE CHAQUE PERMUTATION $\sigma^{(k)}$ SOIT SOLUTION DU PROBLEME D'OPTIMISATION COMBINATOIRE DIT "D'AFFECTATION"

$$\inf_{\sigma} \sum_{i=1,N} c_{i\,\sigma_i}$$

où, ici, la "matrice de coût" $(\mathbf{c_{ij}})$ est donnée par $\mathbf{c_{ij}} = |\mathbf{A_j} - \mathbf{B_i}|^2$, $\quad \mathbf{B_i} = (\mathbf{A}_{\sigma_{\mathbf{i}}^{(\mathbf{k+1})}} + \mathbf{A}_{\sigma_{\mathbf{i}}^{(\mathbf{k-1})}})/2$. C'EST LE PROTOTYPE DISCRET DE LA THEORIE DU TRANSPORT OPTIMAL.

UNE CONDITION NECESSAIRE D'OPTIMALITE EST QUE CHAQUE PERMUTATION $\sigma^{(\mathbf{k})}$ SOIT SOLUTION DU PROBLEME D'OPTIMISATION COMBINATOIRE DIT "D'AFFECTATION"

$$\inf_{\sigma} \sum_{i=1,N} c_{i\,\sigma_i}$$

où, ici, la "matrice de coût" $(\mathbf{c_{ij}})$ est donnée par $\mathbf{c_{ij}} = |\mathbf{A_j} - \mathbf{B_i}|^2, \quad \mathbf{B_i} = (\mathbf{A}_{\sigma_\mathbf{i}^{(\mathbf{k}+1)}} + \mathbf{A}_{\sigma_\mathbf{i}^{(\mathbf{k}-1)}})/2.$ C'EST LE PROTOTYPE DISCRET DE LA THEORIE DU TRANSPORT OPTIMAL. ON PEUT REPASSER AU CONTINU POUR OBTENIR LE THEOREME DE GEOMETRIE DIFFERENTIELLE SUIVANT...

THEOREME: DECOMPOSITION POLAIRE DES DIFFEOMORPHISMES (Résumant des contributions de YB, J.Urbas, L. Caffarelli, D. Cordero-Erausquin, R. McCann, G. Loeper ...et énoncé dans le cas du tore plat):

THEOREME: DECOMPOSITION POLAIRE DES DIFFEOMORPHISMES (Résumant des contributions de YB, J.Urbas, L. Caffarelli, D. Cordero-Erausquin, R. McCann, G. Loeper ...et énoncé dans le cas du tore plat):

TOUT DIFFEOMORPHISME DU TORE PLAT SE DECOMPOSE DE FACON UNIQUE (modulo les translations) EN:

THEOREME: DECOMPOSITION POLAIRE DES DIFFEOMORPHISMES **(Résumant des contributions de YB, J.Urbas, L. Caffarelli, D. Cordero-Erausquin, R. McCann, G. Loeper ...et énoncé dans le cas du tore plat):**

TOUT DIFFEOMORPHISME DU TORE PLAT SE DECOMPOSE DE FACON UNIQUE (modulo les translations) EN:

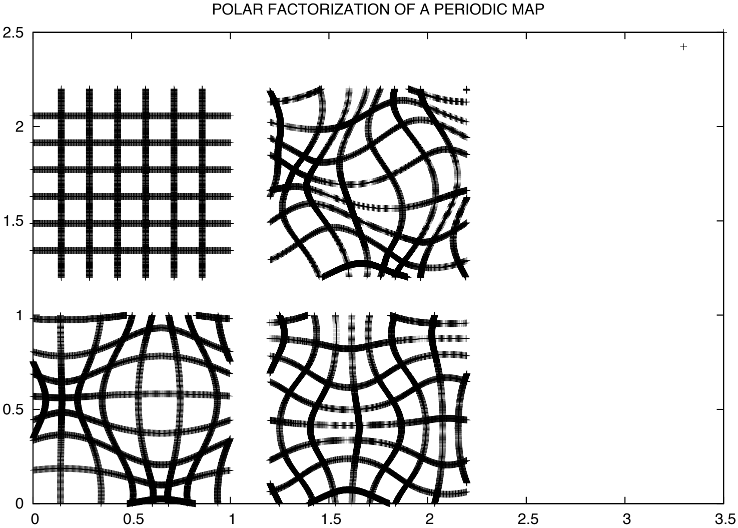
1) UN DIFFEOMORPHISME INCOMPRESSIBLE (I.E. A DETERMINANT JACOBIEN DE MODULE 1)

THEOREME: DECOMPOSITION POLAIRE DES DIFFEOMORPHISMES (Résumant des contributions de YB, J.Urbas, L. Caffarelli, D. Cordero-Erausquin, R. McCann, G. Loeper ...et énoncé dans le cas du tore plat):

TOUT DIFFEOMORPHISME DU TORE PLAT SE DECOMPOSE DE FACON UNIQUE (modulo les translations) EN:

1) UN DIFFEOMORPHISME INCOMPRESSIBLE (I.E. A DETERMINANT JACOBIEN DE MODULE 1)

2) UN DIFFEOMORPHISME A MATRICE JACOBIENNE PARTOUT SYMETRIQUE DEFINIE POSITIVE.



EN BAS, A GAUCHE, UN DIFFEO A JACOBIENNE PARTOUT SYMETRIQUE.>0, A DROITE, UN DIFFEO INCOMPRESSIBLE

L'IDEE DE CET ENONCE PROVIENT DONC DIRECTEMENT DE LA DISCRETISATION EN TEMPS DU PROBLEME DE TRANSPORT OPTIMAL INCOMPRESSIBLE ET A ETE INSPIREE PAR L'APPROXIMATION PAR PERMUTATIONS DES TRANSFORMATIONS INCOMPRESSIBLES.

L'IDEE DE CET ENONCE PROVIENT DONC DIRECTEMENT DE LA DISCRETISATION EN TEMPS DU PROBLEME DE TRANSPORT OPTIMAL INCOMPRESSIBLE ET A ETE INSPIREE PAR L'APPROXIMATION PAR PERMUTATIONS DES TRANSFORMATIONS INCOMPRESSIBLES.

IL EST ESSENTIELLEMENT EQUIVALENT AU THEOREME DE BASE SUIVANT DE LA THEORIE DU TRANSPORT OPTIMAL:

THEOREME: TRANSPORT OPTIMAL DE MESURE (cas du cube pour simplifier)

SUR LE CUBE UNITE, TOUTE MESURE DE PROBABILITE BORELIENNE S'ECRIT DE FACON UNIQUE COMME IMAGE DE LA MESURE DE LEBESGUE PAR UNE APPLICATION BORELIENNE A MATRICE JACOBIENNE SYMETRIQUE POSITIVE (AU SENS DES DISTRIBUTIONS).

THEOREME: TRANSPORT OPTIMAL DE MESURE (cas du cube pour simplifier)

SUR LE CUBE UNITE, TOUTE MESURE DE PROBABILITE BORELIENNE S'ECRIT DE FACON UNIQUE COMME IMAGE DE LA MESURE DE LEBESGUE PAR UNE APPLICATION BORELIENNE A MATRICE JACOBIENNE SYMETRIQUE POSITIVE (AU SENS DES DISTRIBUTIONS).

DES VARIANTES DE CE RESULTAT SONT TRES UTILES POUR LES INEGALITES FONCTIONNELLES ET GEOMETRIQUES, AINSI QUE POUR DIVERSES APPLICATIONS (allant de la cosmologie au traitement des films en couleurs).

IDEE DE LA PREUVE: Les matrices de permutation sont les points extrémaux de l'ensemble convexe des matrices bistochastiques (i.e. à coefficients positifs ou nuls dont la somme de chaque ligne et de chaque colonne vaut un).

IDEE DE LA PREUVE: Les matrices de permutation sont les points extrémaux de l'ensemble convexe des matrices bistochastiques (i.e. à coefficients positifs ou nuls dont la somme de chaque ligne et de chaque colonne vaut un).
Cela permet à Kantorovich (1942) de réduire le problème de transport optimal discret à un simple problème d'optimisation sur l'ensemble des matrices μ bistochastiques:

IDEE DE LA PREUVE: Les matrices de permutation sont les points extrémaux de l'ensemble convexe des matrices bistochastiques (i.e. à coefficients positifs ou nuls dont la somme de chaque ligne et de chaque colonne vaut un).

Cela permet à Kantorovich (1942) de réduire le problème de transport optimal discret à un simple problème d'optimisation sur l'ensemble des matrices μ bistochastiques: $\inf_\mu \sum_{i,j=1,N} c_{ij}\ \mu_{ij}$.

IDEE DE LA PREUVE: Les matrices de permutation sont les points extrémaux de l'ensemble convexe des matrices bistochastiques (i.e. à coefficients positifs ou nuls dont la somme de chaque ligne et de chaque colonne vaut un).
Cela permet à Kantorovich (1942) de réduire le problème de transport optimal discret à un simple problème d'optimisation sur l'ensemble des matrices μ bistochastiques: $\inf_\mu \sum_{i,j=1,N} c_{ij}\ \mu_{ij}$.
Ceci passe bien à la limite N $\sim \infty$ et des arguments de dualité et d'analyse permettent de conclure.

REVENONS AU PROBLEME DE TRANSPORT OPTIMAL INCOMPRESSIBLE DISCRET AVEC UN EXAMPLE EN UNE DIMENSION D'ESPACE POUR SIMPLIFIER. LES AXES VERTICAL ET HORIZONTAL CORRESPONDENT RESPECTIVEMENT AU TEMPS ET A L'ESPACE.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

UNE TENTATIVE PAR ECHANGES ALTERNES DES VOISINS DEUX A DEUX...PREMIERS PAS VERS LA DESTINATION...

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	1	4	3	6	5	8	7	10	9	12	11
2	4	1	6	3	8	5	10	7	12	9	11
12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

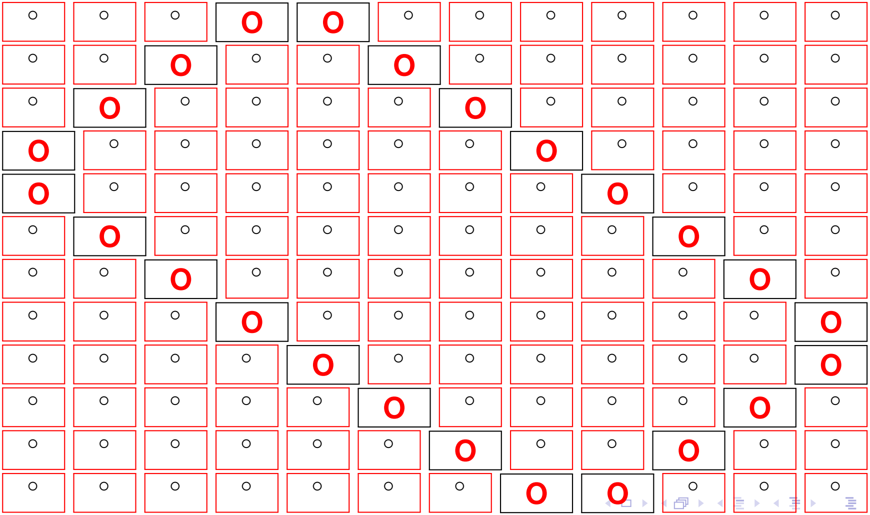
ENFIN ARRIVES A DESTINATION EN 12 ETAPES!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	1	4	3	6	5	8	7	10	9	12	11
2	4	1	6	3	8	5	10	7	12	9	11
4	2	6	1	8	3	10	5	12	7	11	9
4	6	2	8	1	10	3	12	5	11	7	9
6	4	8	2	10	1	12	3	11	5	9	7
6	8	4	10	2	12	1	11	3	9	5	7
8	6	10	4	12	2	11	1	9	3	7	5
8	10	6	12	4	11	2	9	1	7	3	5
10	8	12	6	11	4	9	2	7	1	5	3
10	12	8	11	6	9	4	7	2	5	1	3
12	10	11	8	9	6	7	4	5	2	3	1
12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

SUIVONS LA TRAJECTOIRE DE DEUX VOISINS, LE 4 ET LE 5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	1	4	3	6	5	8	7	10	9	12	11
2	4	1	6	3	8	5	10	7	12	9	11
4	2	6	1	8	3	10	5	12	7	11	9
4	6	2	8	1	10	3	12	5	11	7	9
6	4	8	2	10	1	12	3	11	5	9	7
6	8	4	10	2	12	1	11	3	9	5	7
8	6	10	4	12	2	11	1	9	3	7	5
8	10	6	12	4	11	2	9	1	7	3	5
10	8	12	6	11	4	9	2	7	1	5	3
10	12	8	11	6	9	4	7	2	5	1	3
12	10	11	8	9	6	7	4	5	2	3	1

EN REPASSANT AU CONTINU, ON OBSERVE UN "ECOULEMENT GENERALISE" QUI SEMBLE OPTIMAL



POUR CE FLOT "GENERALISE", PAR UN POINT DONNE, PLUSIEURS TRAJECTOIRES PEUVENT PASSER.

POUR CE FLOT "GENERALISE", PAR UN POINT DONNE, PLUSIEURS TRAJECTOIRES PEUVENT PASSER. CETTE VIOLATION D'UN AXIOME DE LA MECANIQUE CLASSIQUE N'A RIEN DE CHOQUANT DU POINT DE VUE MATHEMATIQUE.

POUR CE FLOT "GENERALISE", PAR UN POINT DONNE, PLUSIEURS TRAJECTOIRES PEUVENT PASSER. CETTE VIOLATION D'UN AXIOME DE LA MECANIQUE CLASSIQUE N'A RIEN DE CHOQUANT DU POINT DE VUE MATHEMATIQUE.
IL S'AGIT SIMPLEMENT DE LA COMPLETION DE L'ESPACE DES FLOTS INCOMPRESSIBLES, POUR LA METRIQUE ASSOCIEE A L'ACTION (Shnirelman, GAFA 1994).

POUR CE FLOT "GENERALISE", PAR UN POINT DONNE, PLUSIEURS TRAJECTOIRES PEUVENT PASSER. CETTE VIOLATION D'UN AXIOME DE LA MECANIQUE CLASSIQUE N'A RIEN DE CHOQUANT DU POINT DE VUE MATHEMATIQUE. IL S'AGIT SIMPLEMENT DE LA COMPLETION DE L'ESPACE DES FLOTS INCOMPRESSIBLES, POUR LA METRIQUE ASSOCIEE A L'ACTION (Shnirelman, GAFA 1994). AINSI, LES FLOTS "GENERALISES" NE SONT PAS PLUS ARTIFICIELS EN ANALYSE DES FLUIDES QUE LES NOMBRES REELS LE SONT EN ANALYSE CLASSIQUE PAR RAPPORT AUX RATIONNELS.

CETTE "EXPERIENCE" SUGGERE UN CADRE CONVEXE (celui des mesures de probabilité sur les chemins au lieu de flots générés par des champs de vecteur lisses) POUR L'ETUDE DU PROBLEME DE TRANSPORT OPTIMAL INCOMPRESSIBLE.

CETTE "EXPERIENCE" SUGGERE UN CADRE CONVEXE (celui des mesures de probabilité sur les chemins au lieu de flots générés par des champs de vecteur lisses) POUR L'ETUDE DU PROBLEME DE TRANSPORT OPTIMAL INCOMPRESSIBLE. AINSI, ON A PU, ETABLIR L'EXISTENCE ET L'UNICITE (INATTENDUE) DU CHAMP D'ACCELERATION ("GRADIENT DE PRESSION") NECESSAIRE AU TRANSPORT INCOMPRESSIBLE OPTIMAL D'UNE CONFIGURATION A UNE AUTRE.

THEOREME: EXISTENCE ET UNICITE DU CHAMP DE PRESSION CONDUISANT AU TRANSPORT OPTIMAL INCOMPRESSIBLE **(Résumant des contributions de YB, A. Shnirelman, A. Figalli et L. Ambrosio ...et énoncé dans le cas du cube unité)**

THEOREME: EXISTENCE ET UNICITE DU CHAMP DE PRESSION CONDUISANT AU TRANSPORT OPTIMAL INCOMPRESSIBLE **(Résumant des contributions de YB, A. Shnirelman, A. Figalli et L. Ambrosio ...et énoncé dans le cas du cube unité)** **ETANT DONNEES UN INTERVALLE DE TEMPS ET DEUX TRANSFORMATIONS BORELIENNES INCOMPRESSIBLES DU CUBE UNITE, IL EXISTE UN UNIQUE CHAMP DE PRESSION $\nabla p_t(x)$ QUI PERMETTE D'ASSURER UN TRANSPORT INCOMPRESSIBLE OPTIMAL DE L'UNE VERS l'AUTRE.**

Ceci entraine plus précisément, que toutes les mouvements incompressibles de coût quasi optimal entre deux configurations données sont des quasi-solutions des équations d'Euler pour un même et unique champ de pression:

$$\partial_t \mathbf{v_t} + (\mathbf{v_t} \cdot \nabla)\mathbf{v_t} \sim -\nabla \mathbf{p_t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v_t} = \mathbf{0}$$

Ceci entraine plus précisément, que toutes les mouvements incompressibles de coût quasi optimal entre deux configurations données sont des quasi-solutions des équations d'Euler pour un même et unique champ de pression:

$$\partial_t \mathbf{v_t} + (\mathbf{v_t} \cdot \nabla)\mathbf{v_t} \sim -\nabla \mathbf{p_t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v_t} = \mathbf{0}$$

L'UNICITE EST SURPRENANTE DU POINT DE VUE GEOMETRIQUE, SANS EQUIVALENT POUR LES MODELES MECANIQUES DE DIMENSION FINIE (COMME CELUI DES CORPS RIGIDES) ET PROBABLEMENT FAUX POUR LES ECOULEMENTS STRICTEMENT PLANS.

LA REGULARITE DE CET UNIQUE CHAMP DE PRESSION N'EST PAS ENCORE PRECISEMENT CONNUE: ON SAIT QUE, PAR RAPPORT AUX VARIABLES D'ESPACE, LA PRESSION EST AU MOINS UNE FONCTION A VARIATION BORNEE, MAIS IL Y A DES EXEMPLES MONTRANT QUE SES DERIVEES SECONDES PEUVENT ETRE DES MESURES SINGULIERES.

LA REGULARITE DE CET UNIQUE CHAMP DE PRESSION N'EST PAS ENCORE PRECISEMENT CONNUE: ON SAIT QUE, PAR RAPPORT AUX VARIABLES D'ESPACE, LA PRESSION EST AU MOINS UNE FONCTION A VARIATION BORNEE, MAIS IL Y A DES EXEMPLES MONTRANT QUE SES DERIVEES SECONDES PEUVENT ETRE DES MESURES SINGULIERES. PAR AILLEURS LE CAS DES ECOULEMENTS STRICTEMENT PLANS EST LARGEMENT OUVERT ET NECESSITE UNE APPROCHE PLUS FINE (mesures de probabilité sur des chemins avec contraintes de tresse, comme l'a proposé A. Shnirelman).

QUELQUES REFERENCES

1) Les équations d'Euler

L. Euler, opera omnia, seria secunda 12, p. 274
livres:
Marchioro-Pulvirenti 1994, Lions 1996, Arnold-Khesin 1998

QUELQUES REFERENCES

1) Les équations d'Euler

L. Euler, opera omnia, seria secunda 12, p. 274
livres:
Marchioro-Pulvirenti 1994, Lions 1996, Arnold-Khesin 1998

2) Transport optimal incompressible

Arnold: Inst. Fourier 1966, Shnirelman: Math Sb USSR 1987,GAFA 1994,
Y.B.: JAMS 1990, ARMA 1993, CPAM 1999 , Physica D 2008, CVPDE 2012,
Duchon-Robert QAM 1992, Ambrosio-Figalli: Arma 2008, CVPDE 2008, Bernot-Figalli-Santambrogio, IHP NL 2009.